（前期日程）

平成27年度　数学

問題の選択方法

- 教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースの受験者は，
  [1] [2] [3] [4] の4問
- 理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）の受験者は，
  [4] [5] [6] [7] [8] の5問
- 医学部の受験者は，
  [6] [7] [8] [9] [10] の5問

を解答すること。

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，19ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。やむをえない場合は，解答用紙の裏も使用してよい。ただし，裏を使用する場合は，その旨を解答用紙の表に明記し，裏に書かれた指示に従って解答すること。

4　問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

1 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

次の問いに答えよ。

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき，a^2+4a+5 の値を求めよ。

(2) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ x\log_2 x - y\log_2 y = 0 \end{cases}$$

(3) s，t を実数とする。座標空間内の同一平面上にある4点 O$(0, 0, 0)$，A$(4, s, t)$，B$(2, 3, 2)$，C$(0, 5, 1)$ が $\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$ をみたすとき，s，t の値を求めよ。

(4) 初項が3，公比が4である等比数列の第 k 項を a_k とする。このとき，$\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2} a_k$ を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

2 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

原点をOとする座標平面上に3点A(0，3)，B(4，0)，C(4，4)を頂点とする三角形ABCがあり，線分AB上に点Pがある。ただし，Pは線分ABの端点にないものとする。直線OPによって三角形ABCを2つの図形に分けたとき，点Aを含む図形の面積をSとする。線分APの長さをtとするとき，次の問いに答えよ。

(1) tの値の範囲を求め，点Pの座標をtを用いて表せ。

(2) 直線OPが線分ACと共有点をもつようなtの値の範囲を求め，その共有点の座標をtを用いて表せ。

(3) Sをtを用いて表せ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

3 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

aを自然数とし，関数 $f(x)=x^3+2x^2+ax+4$ は $x=x_1$ で極大，$x=x_2$ で極小になるものとする。また，曲線 $y=f(x)$ 上の2点 $\mathrm{P}(x_1,\ f(x_1))$，$\mathrm{Q}(x_2,\ f(x_2))$ の中点をRとする。

(1) $a=1$ であることを示せ。

(2) 点Pおよび点Qの座標を求めよ。

(3) 点Rは曲線 $y=f(x)$ 上にあることを示せ。

(4) 点Rにおける曲線 $y=f(x)$ の接線は，点R以外に $y=f(x)$ との共有点をもたないことを示せ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

4 （教育学部・農学部・理学部・工学部）

n を自然数，i を虚数単位とする。集合 I_1，I_2，I_3，I_4，および A を

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \{k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\} \\
I_2 &= \{-k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\} \\
I_3 &= \{ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\} \\
I_4 &= \{-ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\} \\
A &= I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}
\end{aligned}
$$

とする。集合 A の要素が 1 つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある。ただし，それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする。これらのカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる。左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，次の確率を求めよ。

(1) 積 $X_1X_2X_3$ が 0 となる。

(2) 積 $X_1X_2X_3$ が実数となる。

(3) 和 X_1+X_2 が実数となる。

(4) $X_1(X_2+X_3)$ が 0 となる。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$ （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く））

次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,dx$ を求めよ。

(3) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(\sqrt{2},\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき，
$a^4+5a^3+4a^2+4a$ の値を求めよ。

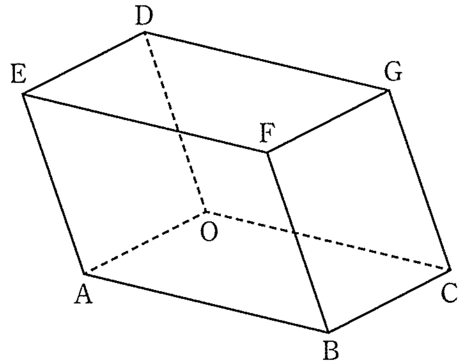
(5) 実数 $a,\ b,\ c$ は $0<a<b<c$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$ をみたすとする。
このとき，$|b-a|<|b-c|$ が成り立つことを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

6 (理学部・工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く)・医学部)

t を実数とする。座標空間内に4点 O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), C(−1, 6, −2), D(t, −2, 4) がある。図のような平行六面体 OABC–DEFG において，点 P が平行四辺形 DEFG の周および内部を動くとき，△OCP の面積 S の最小値を m とする。また，平行四辺形 DEFG を含む平面を α とし，点 O から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点を Q とする。



(1) 平行四辺形 OABC を含む平面に垂直な単位ベクトル $\vec{u}$ で，その z 成分が正となるものを求めよ。

(2) 線分 OQ の長さを求めよ。

(3) 点 Q が平行四辺形 DEFG の周または内部にあるとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(4) t が(3)で求めた範囲にあるとき，m の値および $S = m$ となる点 P の座標をすべて求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

7 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n\text{ が奇数のとき}) \\ 2a_n & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

$$b_1 = a, \quad b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ b_n + 1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める。

(1) a_2，a_3，a_4，および b_2，b_3，b_4 を求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ で定める。$\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$，および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{2n} b_k, \quad U_n = S_n - T_n$$

で定める。

(i) $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

(ii) $a = 1$ のとき，$\{U_n\}$ の一般項を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

8 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

n を自然数とし，曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の第 1 象限における交点の座標を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1)　$x > 0$ のとき，不等式 $n\sin\dfrac{x}{n} < x$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $p_n > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$(☆)\quad \left(n\sin\frac{1}{n}\right)x \leqq n\sin\frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して，次の(i)，(ii)に答えよ。

(i)　不等式 $p_n \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1 + n^2\sin^2\dfrac{1}{n}}}$ が成り立つことを示せ。

(ii)　x 軸，直線 $x = p_n$，および曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$　$(0 \leqq x \leqq p_n)$ で囲まれた領域の面積を S_n とするとき，S_n を p_n を用いて表せ。また，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。

(4)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，(3) の不等式(☆)が成り立つことを示せ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

9 （医学部）

a を正の実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　1辺の長さが1，他の2辺のうち1辺の長さが a である三角形のなかで，面積が最大である三角形の残りの1辺の長さを a を用いて表せ。

(2)　2辺の長さが1，他の2辺のうち1辺の長さが a である四角形のなかで，面積が最大である四角形の残りの1辺の長さを a を用いて表せ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

10 （医学部）

n を自然数，i を虚数単位とする。集合 I_1，I_2，I_3，I_4，および A を

$$I_1 = \{k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_2 = \{-k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_3 = \{ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_4 = \{-ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}$$

とする。集合 A の要素が1つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある。ただし，それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする。これらのカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる。左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，次の確率を求めよ。

(1) 積 $X_1X_2X_3$ が0となる。

(2) 積 $X_1X_2X_3$ が実数となる。

(3) 和 X_1+X_2 が実数となる。

(4) $X_1(X_2+X_3)$ が0となる。

(5) $X_1(X_2+X_3)$ が実数となる。