前期日程

平成27年度入学試験問題（前期日程）

数　　学

（医学部）

——— 解答上の注意事項 ———

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。

2. 問題冊子1冊および解答紙4枚がある。解答紙は1枚ずつ切り離して使用すること。

3. 「解答始め」の合図があったら，初めにすべての解答紙の所定欄に受験番号および氏名を記入すること。受験番号は算用数字で横書きとする。

4. 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ まで4問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。

5. 解答紙の裏面を使う場合は，続きの解答を裏面の仕切り線の下に記入すること。

6. 解答しない問題がある場合でも，解答紙4枚すべてを提出すること。

7. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ a，b は定数であり，$0 < a < b$ とする。定積分

$$I = \int_0^1 a^{1-t} b^t \, dt$$

について，次の問に答えよ。

(1) I を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

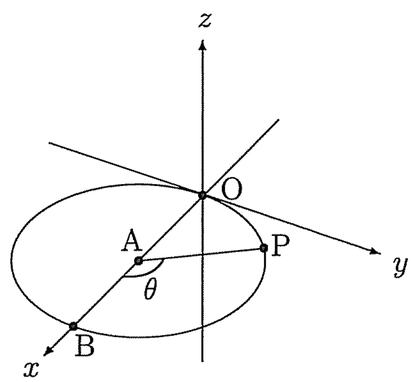
であることを示せ。また，$I > \sqrt{ab}$ を示せ。

(3) $0 < t < 1$ とする。$x > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3) の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$ を示せ。

$\boxed{2}$ 点Oを原点とし，x軸，y軸，z軸を座標軸とする座標空間において，3点 A$(1,0,0)$，B$(2,0,0)$，C$(1,0,1)$がある。点Aを中心とするxy平面上の半径1の円周上に点Pをとり，図のように$\theta = \angle\mathrm{BAP}$とおく。ただし，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$とする。また，直線CPと$yz$平面の交点をQとおく。このとき，次の問に答えよ。



(1)　点Pの座標をθを用いて表せ。

(2)　点Qの座標をθを用いて表せ。

(3)　θの値が$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$の範囲で変化するとき，$yz$平面における点Qの軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ。

$\boxed{3}$ 正方形の4個の頂点を，時計回りに順にA，B，C，Dとする。頂点Aから出発して頂点上を時計回りに点Pを進めるゲームを行う。硬貨を1回投げるごとに，表が出たときには頂点1つ分だけ点Pを進め，裏が出たときには頂点2つ分だけ点Pを進めるものとする。ただし，点Pが頂点Dにとまった時点でゲームは終わるものとする。

硬貨をn回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達する確率をp_nとするとき，次の問に答えよ。

(1) p_2，p_3を求めよ。

(2) p_4，p_5を求めよ。

(3) p_{12}を求めよ。

$\boxed{4}$　p を素数とするとき，次の問に答えよ。

(1)　2 つの自然数 m，n の最大公約数は 1 であるとし，$x = \dfrac{n}{m}$ とおく。p^x が有理数であるならば，$m = 1$ であることを示せ。

(2)　方程式

$$p^x = -x^2 + 9x - 5$$

が有理数の解 x をもつような組 (p, x) をすべて求めよ。