

平成 27 年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また、解答用紙は問題ごとに別になっているので、注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

解答にあたっての注意事項

この問題冊子には、経済学部、理学部、医学部の問題がある。受験者は下の表にしたがって、志望学部学科の問題を解答すること。

学 部	学 科	解 答 す る 問 題
経済学部	経済学科 経済システム法学科	①, ②, ③, ④ の 4 問
理学部	数 学 科	②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ の 6 問
医学部	医 学 科	③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ の 5 問
	保 健 学 科	①, ②, ③, ④ の 4 問

- 1 原点を中心とする半径1の円Oの上に、3点A(0, 1), $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ をとる。線分ACの中点をM, 線分BCの中点をNとする。2点M, Nを通る直線が円Oと交わる2点のうち、Nに近い方の交点をQとする。このとき、線分NQの長さを求めよ。

2

次の3つの条件を満たす自然数の組 (x, y, z) を考える。

- (i) x は奇数である。
- (ii) $x^2 + y^2 = z^2$
- (iii) x, y, z の最大公約数は1である。

例えば $(x, y, z) = (3, 4, 5), (5, 12, 13)$ などがある。

- (1) y は偶数であることを示せ。
- (2) $x = a^2 - b^2, y = 2ab$ となる自然数 a, b が存在することを示せ。
- (3) 条件を満たす (x, y, z) で、 $(3, 4, 5)$ と $(5, 12, 13)$ 以外のものを2組求めよ。

3

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) を C とし、直線 $y = 2x - 1$ を l とする。

- (1) 放物線 C が点 $(1, 1)$ で直線 l と接し、かつ x 軸と共有点をもつための a, b, c が満たす必要十分条件を求めよ。
- (2) $a = \frac{8}{9}$ のとき、(1) の条件のもとで、放物線 C と直線 l および x 軸とで囲まれた部分のうち、第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

4

次の問いに答えよ。

- (1) n 個の実数 a_1, a_2, \dots, a_n に対して

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$$

が成立することを示せ。また、等号が成立するための a_1, a_2, \dots, a_n についての必要十分条件を求めよ。

- (2) 偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき、同じ目が続けて出る確率は $\frac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし、サイコロが偏りをもつとは、1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。

5 n を自然数とする。

- (1) n 以下の非負の整数 k について、関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。
- (2) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 {}_n C_k = (n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。

6

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ を C , 円 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ を C_0 とする。 C , C_0 , x 軸に接する円を C_1 とする。 C , C_1 , x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし, これを繰り返して C , C_n , x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。また, 円 C_n の半径を a_n とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

7

次の条件 (*) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

(*) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して

$$\cos x \leq 1 - ax^2$$

が成り立つ。