平成26年度入学試験問題（前期日程）

数学 甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$ を求めよ。

問 2　$AB = AC = 1$ である二等辺三角形 ABC において，$BC = 2x$，内接円の半径を r とおく。

(1)　r を x を用いて表せ。

(2)　r が最大となる x の値を求めよ(最大値そのものは求める必要はない)。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2(1)	
問 2(2)	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2 (1)

問 2 (2)

2 a, b, c, d は $a+d=0$, $ad-bc=1$ をみたす実数とし，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(50 点)

問 1　$A^2=-E$ を示せ。

問 2　p, q は実数で $p^2+q^2 \neq 0$ をみたすとする。実数 x, y に対して $(pA+qE)(xA+yE)=E$ が成り立つとき，x, y を p, q で表せ。

問 3　θ を実数とする。すべての正の整数 n に対して

$$\{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}^n=(\cos n\theta)E+(\sin n\theta)A$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。ここで，$(\sin\theta)A$ は行列 A の $\sin\theta$ 倍を表す。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

$\boxed{3}$ 整数 m, n は $m \geqq 1$, $n \geqq 2$ をみたすとする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $x > 0$ のとき，$y = \log x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ。答を記すのみでよい。

問 2 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(m,\ \log m)$, $\mathrm{B}(m+1,\ \log m)$, $\mathrm{C}(m+1,\ \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする。S_m を m を用いて表せ。答を記すのみでよい。

問 3 $f(m) = \log m + S_m - \displaystyle\int_m^{m+1} \log x\,dx$ とおく。$f(m) < 0$ が成り立つことを，$y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ。

問 4 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて，不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n$$

を証明せよ。

問 5 不等式 $n\,! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
問 4	
問 5	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

問 5

4 1個のさいころを繰り返し投げて景品を当てるゲームを行う。景品はAとBの2種類あり，次の規則にしたがって景品をもらえるとする。

・出た目の数が6のときは，景品Aをもらえる。

・出た目の数が4，5のときは，景品Bをもらえる。

・出た目の数が1，2，3のときは，景品はもらえない。

・景品Aと景品Bの2種類とももらうことができたらゲームは終了する。

ちょうどn回さいころを投げ終わったところでゲームが終了する確率をp_nとする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　p_2の値を求めよ。

問2　nを2以上の整数とする。p_nをnを用いて表せ。

問3　nを2以上の整数とする。不等式

$$p_{n+1} - p_n < \frac{2}{3}(p_n - p_{n-1})$$

を示せ。ただし，$p_1 = 0$とする。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学甲	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

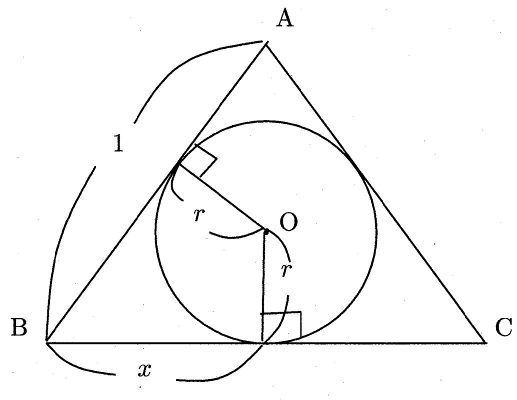
数学（甲）解答例

$\boxed{1}$ [解法が下記のものと異なっていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'\,dx \\ &= \left[x\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx \\ &= \frac{\pi}{4}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

問 2 (1)



内接円の中心を O とおく。△ABC の面積を |△ABC| と書けば，

$$|\triangle\mathrm{ABC}| = |\triangle\mathrm{OAB}| + |\triangle\mathrm{OBC}| + |\triangle\mathrm{OCA}|$$

より，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(1+2x+1)\cdot r \\ \therefore\ & r = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}\end{aligned}$$

(2) r^2 が最大となる x の値を求めればよい。

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^2(1-x)}{1+x} \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{dx} &= \frac{(2x-3x^2)(1+x)-(x^2-x^3)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-2x^3-2x^2+2x}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{2x(x^2+x-1)}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

三角形が成立する条件より，

$$0 < x < 1$$

したがって，$\dfrac{dr^2}{dx}=0$ より，

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

r^2 の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dr^2}{dx}$		$+$	0	$-$	
r^2		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，r^2 は $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき最大となるので，r も $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき最大となる。

$\boxed{2}$ [解法が下記のものと異なっていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問1 ケーリー・ハミルトンの定理 : $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ に $a+d=0, ad-bc=1$ を代入して $A^2=-E$。

成分を直接計算してもよい : $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ において $a^2+bc=a(a+d)-(ad-bc)=-1, ab+bd=b(a+d)=0, ac+cd=c(a+d)=0, bc+d^2=d(a+d)-(ad-bc)=-1$ となる。

問2 $A^2=-E$ を用いて

$$
\begin{aligned}
(pA+qE)(xA+yE) &= (-px+qy)E+(qx+py)A \\
&= \begin{pmatrix} -px+qy+a(qx+py) & b(qx+py) \\ c(qx+py) & -px+qy+d(qx+py) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これが E に等しいので $(1,2)$ 成分を比較して $b(qx+py)=0$ である。もし $b=0$ とすると, $a+d=0, ad=1$ となり, a, d は2次方程式 $x^2+1=0$ の解になる。これは a, d が実数であることに反する。よって $b \neq 0$ であり, したがって $qx+py=0$。このとき $(pA+qE)(xA+yE)=(-px+qy)E$ となるので $-px+qy=1$。これらを x, y について解くと $x=-\dfrac{p}{p^2+q^2}, y=\dfrac{q}{p^2+q^2}$。

問3 [1] $n=1$ のときは両辺は, $(\cos\theta)E+(\sin\theta)A$ なので成り立つ。[2] $n=k$ のとき, 成り立つと仮定する。 $n=k+1$ のとき, $A^2=-E$ と三角関数の加法定理により

$$
\begin{aligned}
&\{(\cos\theta)\,E+(\sin\theta)\,A\}^{k+1} \\
=&\{(\cos k\theta)\,E+(\sin k\theta)\,A\}\{(\cos\theta)\,E+(\sin\theta)\,A\} \\
=&(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)E+(\cos k\theta\sin\theta+\sin k\theta\cos\theta)A \\
=&\{\cos(k+1)\theta\}\,E+\{\sin(k+1)\theta\}\,A
\end{aligned}
$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。したがって, [1], [2] により, すべての正の整数 n に対して成り立つ。

3 [解法が下記のものと異なっていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $y' = 1/x,\ y'' = -1/x^2$

問 2 $S_m = \frac{1}{2}(\log(m+1) - \log m)$

問 3 $\displaystyle\int_m^{m+1} \log x\,dx$ は，$m \leqq x \leqq m+1$ の範囲で，$y = \log x$ と x 軸が囲む部分 T の面積である。$D = (m, 0),\ E = (m+1, 0)$ とおく。問 1 より $\log x$ は上に凸だから，3 角形 ABC と長方形 $ABED$ は T に含まれる。したがって T の面積は，この三角形と長方形の面積の和 $S_m + \log m$ より大きい。つまり $f(m) = S_m + \log m - (T\text{ の面積}) < 0$ である。

問 4 $f(m) < 0$ より，$\displaystyle\log m < \int_m^{m+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}(\log(m+1) - \log m)$ なので，

$$\begin{aligned}&\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1)\\ &< \int_1^n \log x\,dx - \frac{1}{2}\Big\{\big(\log 2 - \log 1\big) + \cdots + \big(\log n - \log(n-1)\big)\Big\}\\ &= \Big[x\log x - x\Big]_1^n - \frac{1}{2}\big(\log n - \log 1\big) = n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n\end{aligned}$$

問 5 前問の両辺に $\log n$ を加えて，$\log 1 + \cdots + \log n = \log n!$ を用いると，

$$\log n! < n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n = \log\left\{e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right\}$$

$\log x$ は増加関数なので，不等式 $n! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ が得られる。

4 [解法が下記のものと異なっていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 2回目に景品 A をもらう場合 (2回目に6が出る場合), 1回目は4または5であるから, 2通り。また, 2回目に景品 B をもらう場合 (2回目に4または5が出る場合) は, 1回目は A (1通り) であるから2通り。したがって, 2回目でA, Bともにそろう場合は全部で4通り。したがって求める確率は

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

問 2 $n \geqq 2$ とする。ちょうど n 回目のゲームで景品A, Bがそろう場合を考える。n 回目に景品Aをもらって景品がそろう場合は, $n-1$ 回目まで一度も景品Aが出ていないから

$$5^{n-1} - 3^{n-1}$$

通りある。ここで, 3^{n-1} は全てハズレの場合の数である。

同様に, n 回目に景品Bをもらって景品がそろう場合は, 景品Bがもらえるのは4, 5が出た場合で2通りあるから,

$$2 \times (4^{n-1} - 3^{n-1})$$

したがって, ちょうど n 回目に景品がそろう確率 p_n は

$$p_n = \frac{5^{n-1} - 3^{n-1} + 2(4^{n-1} - 3^{n-1})}{6^n} = \frac{5^{n-1} - 3^n + 2 \cdot 4^{n-1}}{6^n}$$

問 3

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{-5^{n-1} + 3^{n+1} - 4^n}{6^{n+1}} \\ &< \frac{-4 \cdot 5^{n-2} + 4 \cdot 3^n - 4 \cdot 4^{n-1}}{6 \cdot 6^n} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{-5^{n-2} + 3^n - 4^{n-1}}{6^n}\right) = \frac{2}{3}(p_n - p_{n-1}) \end{aligned}$$

$p_2 = \frac{1}{9}$, $p_1 = 0$ なので最後の等号は $n = 2$ でも成り立つ。