平成２７年度入学試験問題

数　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ）

注　　意

1　問題冊子は 1 冊（2 ページ），解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 3 枚です。

2　問題冊子の印刷不良，ページの落丁・乱丁，及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。ただし，解答用紙の裏面は採点の対象になりません。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数　学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

1

n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4) 引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。

2

座標空間内に 3 点 A (1, 0, 0)，B (0, 1, 0)，C (0, 0, 1) をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の内積が 0 になるような点 P (x, y, z) の集合を S とする。3 点 A，B，C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r の値を求めよ。

(2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。

(3) (1) で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ。

(4) (1) で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を ℓ とする。球面 S と直線 ℓ のすべての共有点について，その座標を求めよ。

3

自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，関数 $f_n(x) = x^{n+1}(1-x)$ を考える。

(1) 曲線 $y = f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\ f_n(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ。ただし，$a_n > 0$ とする。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また，(1) で求めた a_n に対して，$0 \leqq x \leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y = f_n(x)$，x 軸，および直線 $x = a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。B_n および C_n を n の式で表せ。

(3) (2) で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。
ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい。

4

座標空間内の 8 点

(0, 0, 0)，(1, 0, 0)，(1, 1, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1)，(1, 0, 1)，(1, 1, 1)，(0, 1, 1)

を頂点とする立方体を考える。$0 < t < 3$ のとき，3 点 $(t, 0, 0)$，$(0, t, 0)$，$(0, 0, t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし，$f(0) = f(3) = 0$ とする。関数 $f(t)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq t \leqq 3$ のとき，$f(t)$ を t の式で表せ。

(2) 関数 $f(t)$ の $0 \leqq t \leqq 3$ における最大値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ。