学 力 検 査 問 題

数　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，

数学A，数学B

平成27年2月25日

自　9時00分

至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が**5問**あります。総ページは13ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

◇M6(417—116)

空　白

空　白

〔1〕 座標平面上の点 $\mathrm{P}(1,1)$ を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1) k, q, r の値を求めよ。

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

空　白

〔2〕 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える。ただし，p_n, q_n は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

を満たす実数とする。C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを ℓ_n とする。また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) C_n の頂点の y 座標を ℓ_n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{\ell_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。

空　白

〔3〕 座標空間内に5点

$$\mathrm{O}(0,0,0),\ \mathrm{A}\left(0,0,\frac{3}{4}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{C}(s,t,0),\ \mathrm{D}(0,u,0)$$

がある。ただし，s,t,u は実数で，$s>0, t>0, s+t=1$ を満たすとする。3点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

(2) u を t を用いて表せ。また，$0<u<1$ であることを示せ。

(3) 点 $(0,1,0)$ を E とする。点 D が線分 OE を 12 : 1 に内分するとき，t の値を求めよ。

空　白

〔 4 〕 a, b, p は $a > 0,\ b > 0,\ p < 0$ を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x, \quad C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。ただし，e は自然対数の底である。C_1 と C_2 が点 (p, e^p) を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ。

(1) p を a を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} (p + a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$ を求めよ。

空 白

〔５〕　m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) $m \geqq 2, n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2) $n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3) $n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。

たとえば，$n = 3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は

$$\{(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A}, \mathrm{B}), (\mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A}, \mathrm{C}), (\mathrm{B})\},$$
$$\{(\mathrm{B}, \mathrm{C}), (\mathrm{A})\},\ \{(\mathrm{A}), (\mathrm{B}), (\mathrm{C})\}$$

の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である。

(4) (3) の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の範囲を求めよ。

空　白