前期日程試験

平成 27 年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，4ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせなさい。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ nを1以上の整数とし

$$f_n(x)=\frac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2+x)^n}\quad(|x|<2)$$

とおく。これについて

$$I_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx$$

$$I_n=\int_0^1(1-x)^{n-1}f_n(x)\,dx\ (n\geqq 2)$$

とおく。

(1) $f_n(x)$の導関数$f_n'(x)$を$f_{n+1}(x)$を用いて表せ。

(2) nが奇数のとき$I_n=\dfrac{1}{2^{n-1}n}+I_{n+1}$, nが偶数のとき$I_n=I_{n+1}$であることを証明せよ。

(3) $0\leqq I_n\leqq\dfrac{2}{n}$であることを証明せよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}=\log 3$であることを証明せよ。

2 円錐Cは母線の長さが1で，側面を扇形に展開したときの展開図の中心角がθ（$0 < \theta < 2\pi$）であるとする。円錐Cの底面の半径をRとし，円錐Cに内接する球Bの半径をrとする。球Bと円錐Cの側面とで囲まれた部分をAとする。

(1) Rとrをθを用いて表せ。

(2) Aの体積をVとするとき，VをRを用いて表せ。

(3) Cの側面のうちAに含まれる部分の面積をSとする。$0 < \theta < 2\pi$のとき，$\dfrac{V}{S}$を最大にするθの値を求めよ。

3 関数

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left|\,|\log|x|+1| + \log|x| - 1\,\right| \quad (x \neq 0)$$

に対して，$f(x)=e^{g(x)}\ (x \neq 0)$とし，$f(0)=\dfrac{1}{e}$とおく。ここで$e$は自然対数の底である。

(1) 関数$y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

曲線$y=f(x)$上の点$\mathrm{A}(a,\ f(a))$を固定する。x軸上に2点B，Cをとり，$y \leqq f(x)$の表す領域に含まれる三角形ABCを考える。このような三角形のうち最大の面積をもつ三角形の面積を$S(a)$とおく。

(2) $S(0)$を求めよ。

(3) $S(a) \leqq S(0)$であることを証明せよ。

4 1から10までの番号が書かれたカードが1枚ずつ全部で10枚ある。この中から無作為に1枚選び，立方体ABCD-EFGHの頂点Aにそのカードを割り当てる。次に残りの9枚から無作為に1枚選び，頂点Bにそのカードを割り当てる。以下同様にして，CからHまでの頂点にカードを割り当て，立方体の8個の頂点に8枚の異なるカードを割り当てる。

(1) 立方体の8個の頂点に割り当てたカードの番号の和が偶数になる確率を求めよ。

(2) 立方体の面のうちで，面の4頂点に割り当てたカードの番号の和が偶数になるものの個数を数える。その個数がちょうど3になる確率を求めよ。

(3) 立方体のすべての面において，面の4頂点に割り当てたカードの番号の和が偶数になる確率を求めよ。

(4) 立方体のすべての面において，面の4頂点に割り当てたカードの番号の和が奇数になる確率を求めよ。

(計 算 用 紙)