前期日程用

平成27年度

数　学　問　題

（理学部・工学部・医学部医学科）

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で2ページである．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙は全部で5枚である（第4問の解答用紙が2枚用意されている）．各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右2か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面を計算に使ってもよい．

6　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

7　問題冊子は持ち帰ること．

第　1　問（５０点）

$a>0,\ b>0$ とする．xy 平面において，原点を通る傾き正の直線が，直線 $y=-a$ と交わる点を P とし，直線 $x=b$ と交わる点を Q とする．P の x 座標を p とし，線分 PQ の長さを L とおくとき，次の問いに答えよ．

問１　L^2 を $a,\ b,\ p$ を用いて表せ．

問２　$a,\ b$ を定数とし，p を $p<0$ の範囲で変化させるとき，L^2 を最小にする p の値を求めよ．

問３　問２で求めた p の値を p_0 とする．また，c を $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ を満たす正の実数とする．$p=p_0$ のときの L^2 の値を c を用いて表せ．

第　2　問（５０点）

関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ とおく．$f(x)$，$g(x)$ の不定積分を $I=\displaystyle\int f(x)\,dx$，$J=\displaystyle\int g(x)\,dx$ とおく．k を自然数とし，$(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ において，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および，２直線 $x=(k-1)\pi$，$x=k\pi$ で囲まれる２つの部分の面積の和を S_k とおく．次の問いに答えよ．

問１　$I=J+F(x)+C_1$，$J=-I+G(x)+C_2$ を満たす関数 $F(x)$，$G(x)$ を求めよ．ただし，C_1，C_2 は積分定数である．

問２　I，J を求めよ．

問３　S_k を求めよ．

問４　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ．

第　3　問（５０点）

１枚の硬貨を何回も投げ，表が２回続けて出たら終了する試行を行う．ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ．

問１　P_2, P_3, P_4 を求めよ．

問２　P_{n+1} を P_n および P_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 3$ とする．

問３　$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{P_n}{2} \leqq P_{n+1} \leqq P_n$ が成り立つことを示せ．

第　4　問（５０点）

O を原点とする座標空間内に点 A$(0, 0, 1)$, B$(1, 0, 1)$, C$(1, 1, 1)$ が与えられている．線分 OC を１つの対角線とし，線分 AB を一辺とする立方体を直線 OC の周りに回転して得られる回転体 K の体積を求めたい．次の問いに答えよ．

問１　点 P$(0, 0, p)$ $(0 < p \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 H の座標と線分 PH の長さを求めよ．

問２　点 Q$(q, 0, 1)$ $(0 \leqq q \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 I の座標と線分 QI の長さを求めよ．

問３　原点 O から点 C 方向へ線分 OC 上を距離 u $(0 \leqq u \leqq \sqrt{3})$ だけ進んだ点を U とする．点 U を通り直線 OC に垂直な平面で K を切ったときの切り口の円の半径 r を u の関数として表せ．

問４　K の体積を求めよ．

※ この問題の解答用紙は２枚用意されている．